Математика Л-230911 15.12.2023

Урок №65

Тема: Понятие производной высшего порядка, соответствие знака второй производной выпуклости (вогнутости) функции на отрезке.

Срок сдачи работ до 16.12.2024

Теоретический вопрос:

Глоссарий по теме

Возрастание функции. Функция y = f(x) возрастает на интервале X, если для любых x_1 и x_2, $x_1 > x_2$ из этого промежутка выполняется неравенство $f(x_1) > f(x_2)$. Другими словами – большему значению аргумента соответствует большее значение функции.

Выпуклость вверх. Функция выпукла вверх, если, соединив любые две точки ее графика отрезком прямой, обнаруживают, что соответствующая часть графика лежит выше проведенного отрезка.

Выпуклость вниз. Функция выпукла вниз, если, соединив любые две точки ее графика отрезком прямой, обнаруживают, что соответствующая часть графика лежит ниже проведенного отрезка.

Максимум функции. Значение функции в точке максимума называют максимумом функции

Минимум функции. Значение функции в точке минимума называют минимумом функции

Производная (функции в точке) — основное понятие дифференциального исчисления, которое характеризует скорость изменения функции (в конкретной точке).

Производная второго порядка (вторая производная). Производная второго порядка есть первая производная от производной первого порядка.

Производную определяют, как предел отношения приращения функции к приращению ее аргумента при стремлении приращения аргумента к 0, если такой предел существует.

Точка максимума функции. Точку x_0 называют точкой максимума функции $y = f(x)$, если для всех x из ее окрестности справедливо неравенство $f(x_1) \le f(x_2)$.

Точка минимума функции. Точку x_0называют точкой минимума функции $y=f(x)$, если для всех x из ее окрестности справедливо неравенство $f(x_1) \ge f(x_2)$.

Точка перегиба. Точки, в которых выпуклость вверх меняется на выпуклость вниз или наоборот, называются точками перегиба.

Точки экстремума функции. Точки минимума и максимума называют точками экстремума.

Убывание функции. Функция $y=f(x)$ убывает на интервале X, если для любых x_1 и x_2, $x_1 > x_2$из этого промежутка выполняется неравенство $f(x_1) < f(x_2)$. Другими словами – большему значению аргумента соответствует большее значение функции.

Теоретический материал для самостоятельного изучения

Функция *выпукла вниз*, если, соединив любые две точки ее графика отрезком прямой, обнаруживают, что соответствующая часть графика лежит *ниже* проведенного отрезка.

Функция *выпукла вверх*, если, соединив любые две точки ее графика отрезком прямой, обнаруживают, что соответствующая часть графика лежит *выше* проведенного отрезка.

Алгоритм нахождения интервалов выпуклости графика функции:

Найти область определения функции

Найти вторую производную функции

Найти точки, в которых вторая производная равна нулю или не существует

Найти интервалы, на которые область определения функции разбивается этими точками

Определить знаки второй производной на каждом интервале

Если f ''(x) <0, то кривая выпукла вверх;

если f "(x) > 0 то кривая выпукла вниз.

Точки, в которых вторая производная меняет знак, - точки перегиба.

Примеры и разбор решения заданий тренировочного модуля

Пример 1.Найти интервалы выпуклости и точки перегиба функции $y = \frac{1}{4}x^4 - \frac{3}{2}x^2$.

Решение:

Область определения данной функции D(y) = (-∞; +∞)

Найдем вторую производную функции: $y'' = 3x2 - 3$

$y'' = 0$ при x = 1, x = -1

Определим знаки второй производной на каждом интервале (-∞; -1), (-1; 1), (1; +∞), используя метод интервалов (рис. 1).

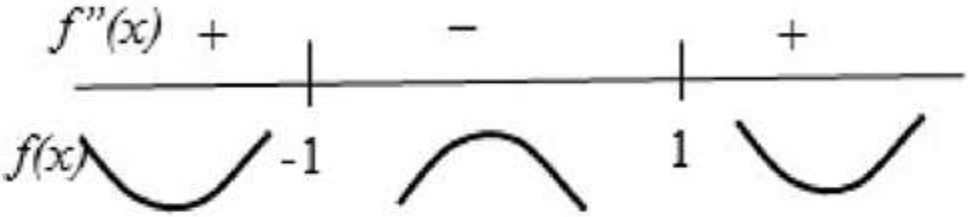


Рисунок 1 – интервалы на числовой прямой

Так как на интервалах (-∞; -1) и (1; +∞) вторая производная положительна, то на этих интервалах функция выпукла вниз.

Так как на интервале (-1; 1) вторая производная отрицательна, то на этом интервале функция выпукла вверх.

Так как при переходе через точки x = 1 и x = -1 вторая производная меняет знак, то эти точки являются точками перегиба.

Ответ: функция выпукла вниз на интервалах (-∞; -1), (1; +∞);

функция выпукла вверх на интервале (-1; 1);

x = 1, x = -1 – точки перегиба.

Пример 2. Найти точки перегиба функции y=sinx

Решение:

Найдем вторую производную заданной функции

У'=cosx

У"= -sinx

Приравняем её к нулю и найдем корни полученного уравнения -sinx=0

$X = \pi k, k \epsilon Z$

В промежутках $(2\pi k;\ \pi + 2\pi k), k \epsilon Z$

Функция y=sinx принимает положительные значения, следовательно, У"= -sinx<0, а в промежутках $(\pi + 2\pi k; 2\pi + 2\pi k), k \epsilon Z$, sinx<0, следовательно

У" >0. Значит, в точках $x = \pi k, k \epsilon Z$ вторая производная меняет знак и в этих точках график функции y=sinx имеет перегиб

Ответ: $x = \pi k, k \epsilon Z$ точка перегиба

Пример 3. Точка движется по закону $S(t) = 3t^4 - 8t^3 + 2t - 3$. В какой момент времени ускорение точки будет равно 48?

Решение:

Ускорение - это вторая производная s(t).

Найдем уравнение ускорения.

$v=S'(t) = 12t^3 - 24t^2 + 2$

$a= S''(t) = 36t^2 - 48t$

Остается подставить вместо ускорения его значение равное 48 и решить уравнение.

$36t^2 - 48t=48$

$36t^2 - 48t-48=0$

При решении один корень получается отрицательный, чего не может быть по условиям задачи, а второй корень равен 2

Ответ: 2

Пример 4. Найдите интервалы выпуклости вверх и выпуклости вниз и точки перегиба функции $f(x) = x^3 - 6x\ln x$.

Проверьте свое решение.

Решение:

$D(f) = (0; +\infty)$

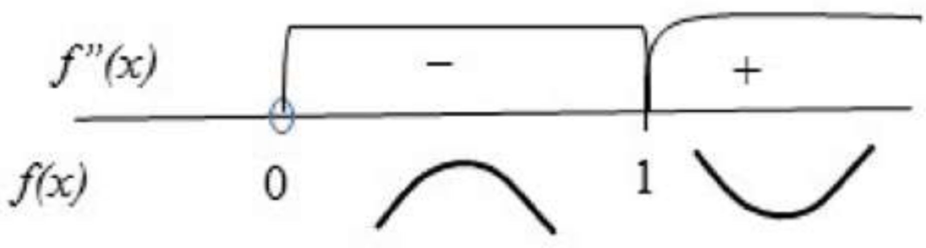
$f''(x) = (x^3 - 6x\ln x)''$

$f''(x) = 6x - \frac{6}{x}$

$f''(x) = 0$ при $x = 1$, $x = -1$.

$f''(x)$ не существует при $x = 0$.

С учетом области определения функции, $x = 1$



Так как на интервале $(1; +\infty)$ вторая производная положительна, то на этом интервале функция выпукла вниз.

Так как на интервале $(0; 1)$ вторая производная отрицательна, то на этом интервале функция выпукла вверх.

Так как при переходе через точку $x = 1$ вторая производная меняет знак, то эта точка является точкой перегиба.

Ответ: функция выпукла вниз на интервале $(1; +\infty)$;

функция выпукла вверх на интервале $(-1; 1)$;

$x = 1$– точка перегиба.

Домашняя работа:

Конспект

п.22 №283 а)